

УДК 004.942:519.21:330.04

МЕТОДИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ОЦІНЦІ НАДІЙНОСТІ НАЙПРОСТІШИХ СИСТЕМ

Литвинова Ольга Борисівна, старший викладач кафедри економічної кібернетики Обласного комунального ВНЗ «Інститут підприємництва «Стратегія»

Lytvynova Olga, a senior lecturer of Department of Economic cybernetics regional municipal higher educational institution "Strategy", the Institute for Entrepreneurship, Zhovti Vody

Lytvynova O. Methods of simulation of reliability's assessing of the elementary systems.

In article the analysis of imitating models of the elementary systems is carried out. These systems contain the random variables having various distribution laws. At an investigation phase and design of systems at construction and realization of machine models the method of statistical tests is used (Monte-Carlo method). This method is based on use of random numbers. The possibility of modeling of random variables and processes definitely can be used for imitation of some real economic events and production situations. Such approach which uses various limiting ratios of probability theory – laws of large numbers and limiting theorems is the cornerstone of a Monte Carlo method. By the Monte-Carlo method the casual choice of numbers from the set probabilistic distribution is the cornerstone of calculations. This numerical method gives the chance to define estimates of probabilistic characteristics of system. In the course of carrying out researches it has been found an assessment of probability of no-failure operation of the device for a certain time interval and the average time of no-failure operation of the device is determined. When calculating have played time of no-failure operation of elements of system, time of no-failure operation of knots of system and all device; are defined probabilities of no-failure operation of elements of system, knots of system and probability of no-failure operation of the device in general. Besides, in the course of studying of system's work have determined the average time of no-failure operation of elements, knots and all device.

Литвинова О.Б. Методи імітаційного моделювання в оцінці надійності найпростіших систем.

У статті проведено аналіз імітаційних моделей найпростіших систем, які містять випадкові величини, що мають різні закони розподілу. На етапі дослідження і проектування систем при побудові і реалізації машинних моделей використано метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло), який базується на використанні випадкових чисел. Можливість моделювання випадкових величин і процесів певним чином може використовуватись для імітації деяких реальних економічних явищ та виробничих ситуацій. В основі методу Монте-Карло лежить такий підхід, який використовує різні граничні співвідношення теорії ймовірності – закони великих чисел і граничні теореми. В основі обчислень за методом Монте-Карло лежить випадковий вибір чисел із заданого ймовірнісного розподілу. Даний чисельний метод дозволяє визначити оцінки ймовірнісних характеристик системи. У процесі проведення досліджень було знайдено оцінку ймовірності безвідмовної роботи пристрою за певний часовий інтервал та визначено середній час безвідмовної роботи пристрою. Під час розрахунків розіграли час безвідмовної роботи елементів системи, час безвідмовної роботи вузлів системи та всього пристрою; визначено ймовірності безвідмовної роботи елементів системи, вузлів системи та ймовірності безвідмовної роботи пристрою в цілому. Крім цього, у процесі вивчення роботи системи визначили середній час безвідмовної роботи елементів, вузлів та всього пристрою.

Литвинова О.Б. Методы имитационного моделирования в оценке надежности простейших систем.

В статье проведен анализ имитационных моделей простейших систем, содержащих случайные величины, имеющие различные законы распределения. На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей использован метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел. Возможность моделирования случайных величин и процессов определенным образом может использоваться для имитации некоторых реальных экономических явлений и производственных ситуаций. В основе метода Монте-Карло лежит такой подход, который использует различные предельные соотношения теории вероятности – законы больших чисел и предельные теоремы. В основе вычислений по методу Монте-Карло лежит случайный выбор чисел из заданного вероятностного распределения. Данный численный метод позволяет определить оценки вероятностных характеристик системы. В процессе проведения исследований было найдено оценку вероятности безотказной работы устройства за определенный временной интервал и определено среднее время безотказной работы устройства. При расчетах разыграли время безотказной работы элементов

системы, время безотказной работы узлов системы и всего устройства; определены вероятности безотказной работы элементов системы, узлов системы и вероятности безотказной работы устройства в целом. Кроме этого, в процессе изучения работы системы определили среднее время безотказной работы элементов, узлов и всего устройства.

Постановка проблеми. Імітаційне моделювання це різновид аналогового моделювання, що реалізується за допомогою набору математичних інструментальних засобів, спеціальних імітаційних комп'ютерних програм і технологій програмування, що дозволяють за допомогою процесів-аналогів провести цілеспрямоване дослідження структури і функцій реального складного процесу у пам'яті комп'ютера в режимі «імітації», виконати оптимізацію деяких його параметрів. На етапі дослідження і проектування систем при побудові і реалізації машинних моделей широко використовується метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло), який базується на використанні випадкових чисел. На сьогодні метод Монте-Карло вважають одним з найефективніших методів дослідження будь-яких систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні теоретичні та практичні аспекти застосування імітаційного моделювання досліджено у працях багатьох вітчизняних і зарубіжних учених. Вагомий внесок серед українських науковців у формування теоретико-методологічної бази імітаційного моделювання економічних систем зробили М.Т. Дехтярук, Ю.В. Золотницька, В.В. Кіт, О.В. Дорохов, Л.О. Філіпковська, В.Є. Бобильов. Основні проблеми специфікації та використання імітаційного моделювання в економічних системах викладено у працях зарубіжних вчених, зокрема Кіндлер Е. К., Клейн Дж., Нейлор Т., Леманн Д., Трахтенгерц Е.А., Хемді А. Таха, Стоун Д., Робертсон Т., Метрополіс Н., Улам С та ін. Аналіз літературних джерел показав, що імітаційні моделі є особливим класом математичних моделей і відрізняються від аналітичних тим, що в їх реалізації головну роль беруть на себе ПЕОМ. Метод Монте-Карло оперує з випадковими числами. Він надає значного впливу на розвиток методів обчислювальної математики під час вирішення багатьох завдань та успішно узгоджується з іншими обчислювальними методами. Застосування Методу Монте-Карло дасть змогу оцінити надійність будь-якої системи.

Мета статті. Імітаційне моделювання – це метод дослідження, заснований на заміні системи імітатором і проведенням експериментів з метою отримання інформації про цю систему. Метод статистичного моделювання (метод Монте-Карло) є методом статистичних випробувань. Даний чисельний метод дозволяє визначити оцінки ймовірнісних характеристик системи. Метод Монте-Карло також застосовується для імітації процесів, що відбуваються в системах, усередині яких є джерело випадковості або які здатні до випадкових дій. Проте його використання не завжди було виправдано через велику кількість обчислень, необхідних для отримання відповіді із заданою точністю. На сьогодні метод Монте-Карло вважають одним із найефективніших методів дослідження будь-яких систем, а часто і єдиним практично доступним методом отримання нової інформації щодо поведінки гіпотетичної системи (на етапі її проектування). Застосуємо метод Монте-Карло для оцінки надійності найпростіших систем.

Результати дослідження. Імітаційне моделювання – це поширений різновид аналогового моделювання, що реалізується з допомогою сукупності математичних інструментальних засобів, спеціальних імітуючих програмних продуктів і технологій, який з допомогою процесів-аналогів дозволяє провести цілеспрямоване дослідження структури та функцій реального процесу в діалоговому режимі, а також провести оптимізацію деяких його параметрів.

Імітаційна модель – обчислювальна процедура, що формалізовано описує об'єкт дослідження й імітує його поведінку. При її побудові немає необхідності спрощувати опис явища чи процесу, часом відкидаючи навіть суттєві частинки для того, щоб ввести його в рамки моделі, придатної для використання тих або інших відомих математичних методів. Для імітаційного моделювання характерна імітація елементарних явищ, які складають

основу процесу дослідження, із збереженням їх логічної структури, послідовності відбуття в часі, характеру та складу інформації про стан процесу. Модель за своєю формою є логіко-математичною (алгоритмічною) [1, С. 654].

Можливість моделювання випадкових величин і процесів певним чином може використовуватись для імітації деяких реальних економічних явищ та виробничих ситуацій. В основі методу Монте-Карло лежить такий підхід, який використовує різні граничні співвідношення теорії ймовірності – закони великих чисел і граничні теореми.

Статистичне випробування за методом Монте-Карло є імітаційним моделюванням за повної відсутності будь-яких правил поведінки. Отримання вибірок за методом Монте-Карло – основний принцип імітаційного моделювання систем, які містять стохастичні елементи.

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Метод статистичного моделювання (метод Монте-Карло) – це спосіб дослідження стохастичних економічних об'єктів і процесів, коли не повністю (до певної міри) є відомими внутрішні взаємодії в цих системах.

Метод Монте-Карло ґрунтується на статистичних випробуваннях і за своєю природою є екстремальним і може використовуватися для розв'язання повністю детермінованих задач, таких як обернення матриць, розв'язок диференціальних рівнянь участинних похідних, знаходження екстремумів і числове інтегрування. При обчисленнях методом Монте-Карло статистичні результати отримують завдяки повторним випробуванням [1, С. 662].

В основі обчислень за методом Монте-Карло лежить випадковий вибір чисел із заданого ймовірнісного розподілу. Для практичних розрахунків ці числа беруть із таблиць або отримують шляхом певних операцій, результатами яких є псевдовипадкові числа з тими ж властивостями, що й числа, отримані шляхом випадкової вибірки.

Імітаційні моделі складних систем містять випадкові величини, що мають різні закони розподілу. При побудові алгоритму імітації ці випадкові величини реалізуються генераторами випадкових чисел. Від якості генераторів випадкових чисел, що використовуються, залежить точність результатів імітаційного моделювання [2, С. 149].

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках імітації на ПЕОМ. На сьогодні він охоплює будь-яку техніку статистичного здійснення вибірки, яке використовується для приблизних рішень кількісних проблем. Він застосовується: 1) для визначення площі довільних фігур; 2) для вибору найкращих стратегій в задачах, де присутні багато випадкових факторів; 3) для визначення ймовірності, чи відбудеться якась подія; 4) для побудови різних геометричних об'єктів, в тому числі лабіринтів та фракталів; 5) для моделювання поведінки складних екологічних та економічних систем [3, С. 317].

Розв'язування задач методом статистичного моделювання полягає в:

1) опрацюванні й побудові структурної схеми процесу, виявлення основних взаємозв'язків;

2) формалізованому описі процесу;

3) моделюванні випадкових явищ (випадкових подій, випадкових величин, випадкових функцій), що притаманні досліджуваній системі;

4) моделюванні процесу функціонування системи (на підставі використання даних, що отримані на попередньому етапі) – відтворення процесу відповідно до розробленої структурної схеми і формалізованого опису (імітаційні прогони);

5) накопиченні результатів моделювання (імітаційних прогонів), статистичному опрацюванні, аналізі та інтерпретації їх.

Нехай пристрій складається з трьох вузлів. Перший і другий вузли містять по два елементи: перший – А і В, другий – С і D, які з'єднані паралельно. Третій вузол містить

три елементи: E, F і G, які теж з'єднані паралельно. Час безвідмовної роботи елементів (в годинах) розподілений за показовим законом

$$f(x) = e^{-1x}$$

з параметрами, відповідно рівними 0,05; 0,04; 0,1; 0,2; 0,08; 0,02; 0,4. Знайти методом Монте-Карло: а) оцінку P^* ймовірності безвідмовної роботи пристрою за час тривалістю 12 годин; б) середній час безвідмовної роботи пристрою. Провести 50 випробувань.

Для визначеності будемо брати випадкові числа з двома десятковими знаками після коми з таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел при розігруванні τ_j . Числа вибираємо з 6 по 12 стовпчики таблиці [4, С. 309].

а) Розіграємо час (в год.) безвідмовної роботи елементів за формулами:

$$r_1 = e^{-0,05x}; \quad t_A = 20(-\ln r_1).$$

$$r_2 = e^{-0,04x}; \quad t_B = 25(-\ln r_2).$$

$$r_3 = e^{-0,1x}; \quad t_C = 10(-\ln r_3).$$

$$r_4 = e^{-0,2x}; \quad t_D = 5(-\ln r_4).$$

$$r_5 = e^{-0,08x}; \quad t_E = 125(-\ln r_5).$$

$$r_6 = e^{-0,02x}; \quad t_F = 50(-\ln r_6).$$

$$r_7 = e^{-0,4x}; \quad t_G = 2,5(-\ln r_7).$$

де $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ – випадкові числа. Візьмемо, наприклад, для першого випробування випадкові числа 0,76; 0,52; 0,01; 0,35; 0,86; 0,34; 0,67 і по них розіграємо час безвідмовної роботи елементів.

$$t_A = 5,49; \quad t_B = 16,35; \quad t_C = 46,05; \quad t_D = 5,25;$$

$$t_E = 1,89; \quad t_F = 53,94; \quad t_G = 1,00.$$

Перший вузол складається з двох елементів А і В, які з'єднані паралельно, тому для його роботи достатньо, щоб працював хоча б один з елементів. Таким чином, у першому випробуванні перший вузол буде працювати $\max(5,49; 16,35) = 16,35$ год.

Другий вузол складається з двох елементів С і D, які з'єднані паралельно, тому для його роботи теж достатньо, щоб працював хоча б один з елементів. Таким чином, у першому випробуванні другий вузол буде працювати $\max(46,05; 5,25) = 46,05$ год.

Третій вузол складається з трьох елементів E, F і G, які з'єднані паралельно, тому для його роботи теж достатньо, щоб працював хоча б один з трьох елементів. Таким чином, у першому випробуванні третій вузол буде працювати $\max(1,89; 53,94; 1,00) = 53,94$ год.

Три вузли пристрою з'єднані послідовно, тому пристрій буде працювати, якщо три вузли працюють одночасно. Звідси слідує, що у першому випробуванні пристрій буде працювати $\min(16,35; 46,05; 53,94) = 16,35$ год.

Для проведення розрахунків стосовно роботи пристрою використаємо таблицю випадкових чисел, які будуть моделювати елемент (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця випадкових чисел, що моделюють елемент

Номер випробування	Випадкові числа, що моделюють елемент						
	A	B	C	D	E	F	G
1	0,76	0,52	0,01	0,35	0,86	0,34	0,67
2	0,64	0,89	0,47	0,42	0,96	0,24	0,8
3	0,19	0,64	0,5	0,93	0,03	0,23	0,2
4	0,09	0,37	0,67	0,07	0,15	0,38	0,31
5	0,8	0,15	0,73	0,61	0,47	0,64	0,03
і т.д.							
50	0,87	0,63	0,79	0,19	0,76	0,35	0,58

Складемо розрахункову таблицю 2.

Таблиця 2

Розрахункова таблиця

№ п/п	Час безвідмовної роботи											*
	Елементів							Вузлів			Прист- рою	
	A	B	C	D	E	F	G	1	2	3		
1	5,49	16,35	46,05	5,25	1,89	53,94	1,00	16,35	46,05	53,94	16,35	1
2	8,93	2,91	7,55	4,34	0,51	71,36	0,56	8,93	7,55	71,36	7,55	
3	33,21	11,16	6,93	0,36	43,83	73,48	4,02	33,21	6,93	73,48	6,93	
4	48,16	24,86	4,00	13,30	23,71	48,38	2,93	48,16	13,30	48,38	13,30	2
№ п/п	Час безвідмовної роботи											*
	Елементів							Вузлів			Прист- рою	
	A	B	C	D	E	F	G	1	2	3		
5	4,46	47,43	3,15	2,47	9,44	22,31	8,77	47,43	3,15	22,31	3,15	
6	21,58	66,48	13,09	1,93	8,66	51,08	0,93	66,48	13,09	51,08	13,09	3
7	15,97	14,05	17,15	7,14	35,17	52,49	3,01	15,97	17,15	52,49	15,97	4
8	78,24	74,89	18,33	2,90	1,04	19,28	1,04	78,24	18,33	19,28	18,33	5
9	59,91	28,49	6,16	1,78	9,17	5,27	1,49	59,91	6,16	9,17	6,16	
10	70,13	16,35	0,41	3,78	3,11	52,49	0,56	70,13	3,78	52,49	3,78	
...												
40	20,43	45,81	2,11	12,63	8,42	53,94	0,32	45,81	12,63	53,94	12,63	13
41	15,97	35,68	39,12	0,87	40,24	41,05	0,03	35,68	39,12	41,05	35,68	14
42	17,83	1,55	18,97	12,04	8,92	5,83	2,11	17,83	18,97	8,92	8,92	
43	0,82	24,19	13,09	13,30	3,76	80,47	4,74	24,19	13,30	80,47	13,30	15
...												
50	2,79	11,55	2,36	8,30	3,43	52,49	1,36	11,55	8,30	52,49	8,30	

В таблиці 2 наведена певна кількість випробувань. Всього було проведено 50 випробувань і виявилось, що у 15 випробуваннях пристрій працював 12 годин (і більше).

Графічне зображення результатів розподілу часу безвідмовної роботи вузлів пристрою наведена на рис. 1.

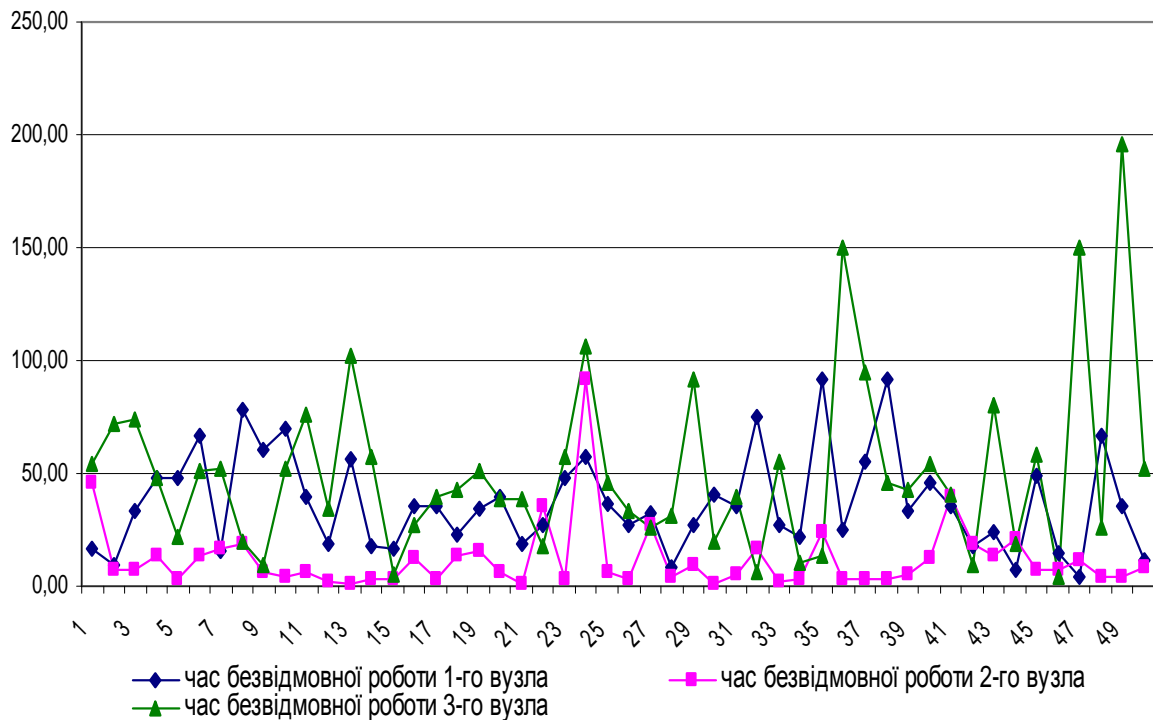


Рис. 1. Розподіл часу безвідмовної роботи вузлів пристрою.

Шукана оцінка надійності пристрою, тобто ймовірності його безвідмовної роботи за час тривалістю 12 годин, складає $P^* = 15 / 50 = 0,3$.

Для порівняння приведемо аналітичний розв'язок. Ймовірності безвідмовної роботи елементів:

$$R_A(12) = 0,55, \quad R_B(12) = 0,62, \quad R_C(12) = 0,30, \quad R_D(12) = 0,09, \\ R_E(12) = 0,38, \quad R_F(12) = 0,79, \quad R_G(12) = 0,01.$$

Ймовірність безвідмовної роботи вузлів за час тривалістю 12 годин складає:

$$P_1 = 0,83, \quad P_2 = 0,36, \quad P_3 = 0,87.$$

Ймовірність безвідмовної роботи пристрою: $P = P_1 > P_2 > P_3 = 0,26$.

Абсолютна похибка $|P - P^*| = 0,04$.

Графічне зображення результатів розподілу часу безвідмовної роботи пристрою наведена на рис. 2.

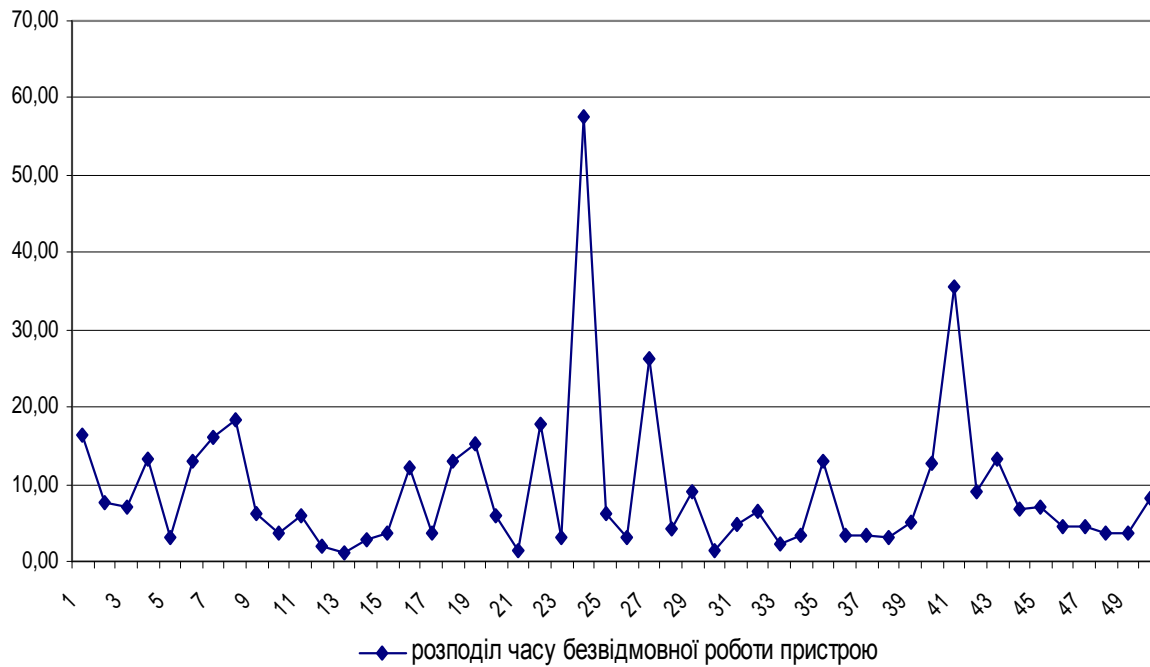


Рис. 2. Розподіл часу безвідмовної роботи пристрою.

Визначимо середній час безвідмовної роботи пристрою, враховуючи, що у 50 випробуваннях він працював безвідмовно всього 453,63 години: $\bar{t}^* = 9,073$.

Для порівняння приведемо аналітичні розрахунки. Середній час роботи елементів:

$$\bar{t}_A = 20, \quad \bar{t}_B = 25, \quad \bar{t}_C = 10, \quad \bar{t}_D = 5, \quad \bar{t}_E = 12,5, \quad \bar{t}_F = 50, \quad \bar{t}_G = 2,5.$$

Середній час роботи вузлів:

$$\bar{t}_1 = \max(20, 25) = 25, \quad \bar{t}_2 = \max(10, 5) = 10, \quad \bar{t}_3 = \max(12,5, 50, 2,5) = 50.$$

Середній час роботи пристрою: $\bar{t} = \min(25, 10, 50) = 10$.

Абсолютна похибка $|\bar{t} - \bar{t}^*| = 0,93$.

Висновки. На етапі дослідження і проектування роботи пристрою при побудові і реалізації машинних моделей було застосовано метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло), який базується на використанні випадкових чисел. На сьогодні метод Монте-Карло є одним з найефективніших методів дослідження будь-яких систем.

Так як в основі обчислень за методом Монте-Карло лежить випадковий вибір чисел із заданого ймовірнісного розподілу, то для практичних розрахунків ці числа були обрані з таблиць.

У процесі дослідження роботи системи (пристрою) було проведено 50 випробувань та знайдено оцінку ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента вузла, кожного вузла пристрою та всього пристрою за вказаний час. Також було визначено середній час безвідмовної роботи кожного елемента, вузла та пристрою.

Застосування методу Монте-Карло у процесі моделювання роботи системи дає можливість ефективно оцінити її надійність та визначити необхідні ймовірнісні характеристики системи. Застосування ПЕОМ для імітації роботи системи дозволяє провести будь-яку кількість випробувань, що, в свою чергу, сприяє ефективно оцінити надійність роботи системи.

Список використаних джерел:

1. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
2. Стеценко, І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
3. Купалова Г.І. Теорія економічного аналізу: Навч. посіб. – К.: Знання, 2008. – 639 с.
4. Гмурман В.Е. (1999), *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике*: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 5-е, стер. – М.: Высш. шк., – 400 с.: ил.
5. Братушка, С. М. Імітаційне моделювання як інструмент дослідження складних економічних систем [Текст] / С. М. Братушка // Вісник Української академії банківської справи. – 2009. – № 2 (27). – С. 113–118.
6. Ситник В.Ф., Орленко Н.С. (1999), *Імітаційне моделювання*: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К. : КНЕУ, – 208 с.

References.

1. Ekonomiko-matematychne modeliuvannia: Navchal'nyj posibnyk / Za red. O. T. Ivaschuka. – Ternopil': TNEU «Ekonomichna dumka», 2008, 704 p.
2. Stetsenko, I.V. Modeliuvanniasystem: navch. posib. [Elektronnyjresurs, tekst], I.V. Stetsenko ; M-voosvityinaukyUkrainy, Cherkas. derzh. tekhnol. un-t.,Cherkasy , ChDTU, 2010, 399 p
3. KupalovaG.I. (2008), *Teoriya ekonomichnogo analizu*. [Theory of economic analysis] Navch. Posib, K, Znannya, 639p.
4. HmurmanV.E. (1999), *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teoryy veroiatnostej y matematycheskoj statystyke*: Ucheb. Posobyie dlia studentov vuzov. Yzd. 5-e, ster. – M. : Vyssh. shk., – 400 p
5. Bratushka, S. M. Imitatsijne modeliuvannia iak instrument doslidzhennia skladnykh ekonomichnykh system [Tekst] / S. M. Bratushka // Visnyk Ukrain'skoi akademii bankivs'koi spravy, 2009, No 2 (27), pp. 113–118.
6. Sytnyk V.F., OrlenkoN.S. (1999), *Imitatsijne modeliuvannia*, Navch.-metod. Posibnyk dlia samost. vyvch. Dysts, K., KNEU, 208 p

Ключові слова: імітаційне моделювання, математичні методи, моделювання випадкових величин, метод Монте-Карло, ймовірнісні характеристики, оцінка ймовірності безвідмовної роботи пристрою.

Ключевые слова: имитационное моделирование, математические методы, моделирования случайных величин, метод Монте-Карло, вероятностные характеристики, оценка вероятности безотказной работы устройства.

Keywords: simulation, mathematical methods, modeling of random variables, method of Monte Carlo, probabilistic descriptions, a probability's assessment of no-failure operation of the device.

Рецензент: С.А. Харін, д.т.н., професор, ОКВНЗ «Інститут підприємництва «Стратегія».